Εισαγωγή στην Τοπολογία, Πτυχιακή εξέταση Ιανουάριος 2019

Θέμα 1 (1.5 μον.)
Να δώσετε τον ορισμό του μετρικού χώρου και να αποδείξετε ότι σε κάθε μετρικό χώρο ισχύουν τα εξής:

(i) για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in X$ ισχύει $|\rho(\alpha,\beta) - \rho(\alpha,\gamma)| \leq \rho(\beta,\gamma)$.

(ii) για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in X$ ισχύει $|\rho(\alpha,\beta) - \rho(\gamma,\delta)| \leq \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\delta)$.

(iii) αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες στοιχείων του X και $x, y \in X$ ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει προς τον πραγματικό αριθμό $\rho(x,y)$.

Θέμα 2 (2.5 μον.)

(i) Να ορίσετε τη συνήθη μετρική στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και να αποδείξετε ότι αποτελεί πράγματι μια μετρική.

(ii) Να υπολογίσετε (χωρίς αιτιολόγηση) την κλειστή θήκη, το εσωτερικό, το παράγωγο σύνολο και το σύνορο των παρακάτω υποσυνόλων του $\mathbb{R}$:

  (a) $A = ((0,3) \cap \mathbb{Q}) \cup \{4\}$
  (b) $B = (-1,2] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\} \cup (3,+\infty)$
  (c) $C = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(iii) Για οποιοδήποτε εσείς επιθυμείτε από τα τρία παραπάνω σύνολα να δώσετε πλήρη αιτιολόγηση για τα αποτελέσματα που βρήκατε.

Θέμα 3 (1.5 μον.)
Έστω $(X,\rho), (Y,d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής, τότε για κάθε ανοιχτό υποσύνολο G του Y, το σύνολο $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Θέμα 4 (1 μον.) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε το A να μην είναι διάστημα. Να αποδείξετε ότι το A δεν είναι συνεκτικό.

Θέμα 5 (1.5 μον.)
Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Πότε ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές; (Να δώσετε τον ορισμό με χρήση των καλυμμάτων). Με χρήση του παραπάνω ορισμού να δείξετε ότι αν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία στον (X,d) και l το όριό της, τότε το σύνολο $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ είναι συμπαγές.

Θέμα 6 (2 μον.)

(i) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος, $x \in X$ και A ένα μη κενό υποσύνολο του X. Να αποδείξετε ότι $d(x,A) = d(x,\bar{A})$

(ii) Συμβολίζοντας με ρ την ευκλεδεία μετρική στον $\mathbb{R}^2$ να βρέιτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\rho((0,0),A) = 1$ και $\rho((0,0),A^o) = 2$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ